

ІНТЕГРУВАННЯ РІВНЯНЬ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЗБУРЕНЬ ВІД СОНЯЧНОЇ РАДІАЦІЇ В ОРБИТАХ ГЕОСИНХРОННИХ СУПУТНИКІВ

В.У. Клімик, В.П. Єпішев, І.І. Мотрунич, В.І. Кудак, Г.М. Мацо

Ужгородський національний університет, Лабораторія космічних досліджень
вул.Далека, 2а, 88000, Ужгород

Похідні від елементів орбіт геосинхронних супутників виражаються через гармоніки, отримані за принципом найменших квадратів на основі вибірки 12 супутників з каталога. Отримані вирази інтегруються елементарно. Результати співпадають з функціями зміни орбіт, отриманими чисельним інтегруванням рівнянь Лагранжа там, де його можна застосувати.

Ключові слова: геосинхронні супутники, збурення орбіт, сонячна радіація, гармоніки, рівняння Лагранжа.

Вступ

Розв'язування рівнянь Лагранжа в [1] пропонується проводити чисельним інтегруванням. Воно зводиться до обчислення з достатньо малим кроком на певному інтервалі значень \dot{a} , \dot{e} , $\dot{\omega}$, \dot{i} , $\dot{\Omega}$ і \dot{M} , що вже виконувалось в [2]. Цей метод дає добрі результати на проміжку декількох днів. На інтервалі більше року результат може бути помилковим із-за порівняно великої частоти і амплітуди короткоперіодичних коливань похідної елемента орбіти. У випадку геосинхронних супутників (ГС) можна іти іншим шляхом. Функції часу \dot{a} , \dot{e} , $\dot{\omega}$, \dot{i} , $\dot{\Omega}$ і \dot{M} виражаються через короткоперіодичні і довгоперіодичні гармоніки зміни цих величин. Отримані функції достатньо прості і інтегруються звичайним способом. На невеликих проміжках часу (а інколи також і на великих) обидва методи дають приблизно однакові результати.

Збурення великої піввісі ГС під дією сонячної радіації

В ГС короткоперіодичні зміни похідної великої піввісі \dot{a} , обчислені за рівняннями Лагранжа [1] для вибірки з 12 супутників, можна виразити гармонікою:

$$\dot{a} = A_k \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_k} + \phi_k\right) + \dot{a}_{k0},$$

де $T_k \approx 1$ доби, $\dot{a}_{k0} \approx 0$. Середнє значення A_k в залежності від S/m у різних ГС знаходиться в межах 20 – 250 м за добу. Параметри T_k , A_k , ϕ_k , \dot{a}_{k0} для кожного ГС на певному інтервалі часу визначаються за принципом найменших квадратів.

Для точного визначення ϕ за одиницю часу слід приймати не MJD, а кількість днів від початку відліку, що співпадає з початком цього інтервалу. За початок відліку приймаємо початок дати 21.03.1994.

На великих проміжках часу A_k змінюється з періодом $T_d \approx 0,5$ року (рис. 1):

$$A_k = A_d \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \phi_d\right) + A_{k0},$$

де, параметри A_d , T_d , ϕ_d і A_{k0} визначаються за принципом найменших квадратів, A_d корелює з A_{k0} і змінюється в межах 0.9 м/д – 8 м/д. Гармоніка зміни A_k супутника 89004F і відповідні точки, за якими отримана ця гармоніка, приведені на рис. 2.

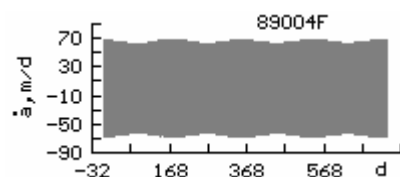


Рис. 1. Зміна \dot{a} ГС 89004F в інтервалі 2 років.

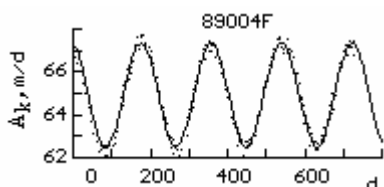


Рис. 2. Довгоперіодичні зміни амплітуди добових змін \dot{a} ГС 89004F.

Отже, зміну \dot{a} можна виразити як функцію від часу:

$$\dot{a}(t) = \left[A_d \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \varphi_d\right) + A_{k0} \right] \times \sin(2\pi t + \varphi_k). \quad (1)$$

Після елементарних тригонометричних перетворень і інтегрування функції (1) отримаємо вираз, що є сумою трьох гармонік:

$$a(t) = A_d I_1 + A_{k0} I_2 - a(t_0), \quad (2)$$

$$I_1 = \frac{\sin\{D_1 \cdot 2\pi t + (\varphi_d - \varphi_k)\} - \sin(\varphi_d - \varphi_k)}{D_1 \cdot 4\pi} - \frac{\sin\{D_2 \cdot 2\pi t + (\varphi_d + \varphi_k)\} - \sin(\varphi_d + \varphi_k)}{D_2 \cdot 4\pi},$$

$$I_2 = \frac{\cos \varphi_k - \cos(2\pi t + \varphi_k)}{2\pi},$$

$$D_1 = 1/T_d - 1, \quad D_2 = 1/T_d + 1.$$

Велика піввісь $a(t)$ залежить від 4 параметрів: амплітуд A_d і A_{k0} та початкових фаз φ_d і φ_k ($T_d \approx 0.5$ року).

Використовуючи параметри гармонік і функцію (2), побудували криву зміни від часу великої піввісі $a(t)$ ГС 89004F в інтервалі 4 діб (рис. 3, крива 1). Точки біля кривої 1 на рис. 3 – значення $a(t)$, знайдені чисельним інтегруванням рівняння Лагранжа [1]. Середнє квадратичне відхилення цих значень від кривої 1 на інтервалі 4 діб $\sigma = 2.003$ м. З часом ця похибка зростає. Це пояснюється збільшенням числа коливань на часовому інтервалі. На великих інтервалах часу точний результат отримується через інтегрування функції (2).

З рис. 3 (на вісі справа) видно, що тиск сонячної радіації на ГС 89004F приводить до періодичних коливань довжини піввісі a з амплітудою 10 м. Їх період такий самий, як коливань значень \dot{a} – одна доба. Але відповідні гармоніки відрізняються фазами.

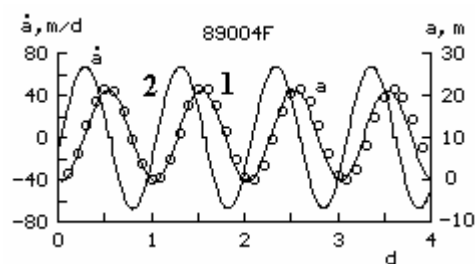


Рис. 3. Зміна великої піввісі a (1) і швидкості зміни великої піввісі \dot{a} (2) ГС 89004F в інтервалі 4 діб.

На великих проміжках часу амплітуда добових коливань великої піввісі a слабо змінюється з періодом 0.5 року так, що вигляд графіка зміни a протягом 2 років (рис. 4) і графіка зміни \dot{a} (рис. 1) однаковий. Але коливання a відбуваються навколо точки a_0 , що не рівна нулю. Її значення визначається початковою точкою \dot{a}_0 .

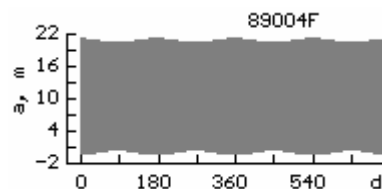


Рис. 4. Зміна піввісі a ГС 89004F в інтервалі 2 роки.

За основну характеристику зміни a прийемо значення подвоєної амплітуди добових коливань $\Delta a = 2 A_k$, що є максимальною похибкою визначення a даного ГС, зумовленою сонячною радіацією. Величина Δa кореляційно залежить від S/m (рис. 5): $\Delta a = 3330.59 \cdot S/m + 0.69$, коефіцієнт регресії $\rho = 0.9980$. Похибка Δa у різних супутників може змінюватися від 5 до 75 метрів в залежності від величини параметра S/m ($0.002 \leq S/m \leq 0.022$ м²/кг), що добре узгоджується з результатами, отриманими іншим методом [3]. З часом ця похибка змінюється мало. Вона коливається з періодом 0.5 року і амплітудою $d\Delta = 2 \cdot A_d$ навколо середнього значення.

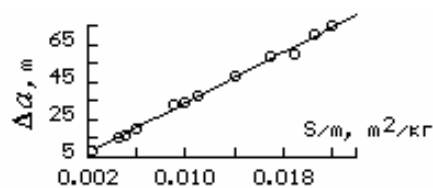


Рис. 5. Залежність максимальної похибки Δa у визначенні великої піввісі ГС, зумовленої сонячною радіацією, від відношення S/m .

За вибіркою з 12 ГС знайдено кореляційну залежність довгоперіодичної зміни $d\Delta$ максимальної похибки у визначенні великої піввісі ГС, зумовленої сонячною радіацією, від її величини Δ_{cp} (рис. 6): $d\Delta = 0.020209 \cdot \Delta_{cp} + 0.125739$, $\rho = 0.72$. Зміна похибки не перевищує 2 – 5 % величини похибки.

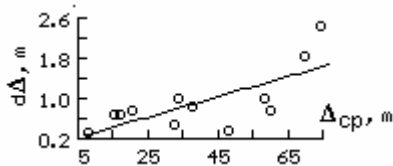


Рис. 6. Залежність зміни максимальної похибки $d\Delta$ у визначенні великої піввісі ГС, зумовленої сонячною радіацією, від величини Δ_{cp} цієї похибки.

Нахил орбіти

Зміна i має лише добову гармоніку (період $T_k = 0.990^d \pm 0.034^d$), амплітуда якої змінюється з періодом 0.5 року, а ордината вісі $a_{k0} \approx 0$. Зміну амплітуди можна описати річною гармонікою (рис. 7). Очевидно, зміну i можна виразити як функцію від часу, що містить лише 4 параметри:

$$i(t) = A_d \cdot \left| \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d\right) \right| \cdot \sin(2\pi t + \varphi_k), \quad (3)$$

де φ_k – фаза добової гармоніки зміни i , а A_d , T_d , φ_d – параметри гармоніки, що визначає зміну амплітуди добових коливань i , $T_d \approx 1$ рокові. Ордината вісі довгоперіодичної гармоніки $a_{d0} \approx 0$. Після інтегрування виразу (3) отримуємо функцію зміни нахилу орбіти $i(t)$ під дією сонячної радіації:

$$i(t) = A_d \cdot (Q_1 - Q_2) \cdot \operatorname{sgn}\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \varphi_d\right) - i(t_0), \quad (4)$$

$$Q_1 = \frac{\sin[(1/T_d - 1) \cdot 2\pi t + (\varphi_d - \varphi_k)]}{(1/T_d - 1) \cdot 4\pi};$$

$$Q_2 = \frac{\sin[(1/T_d + 1) \cdot 2\pi t + (\varphi_d + \varphi_k)]}{(1/T_d + 1) \cdot 4\pi}. \quad (5)$$

В (4) використано функцію знаку:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \\ -1, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}.$$

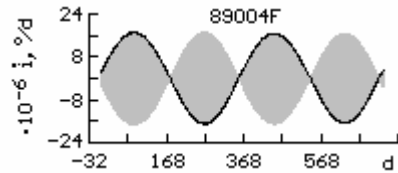


Рис. 7. Зміна в інтервалі 2 років i ГС 89004F (сіра область) і довгоперіодична гармоніка зміни амплітуди добових коливань i цього ГС.

Функція (4) є сумою двох гармонік. Обчислена за знайденими значеннями φ_k , φ_d , A_d , T_d і формулою (4) зміна нахилу орбіти протягом 2 років приведена на рис. 8. Положення графіка по вісі i визначається значенням i в початковій точці, але постійним залишається максимальне значення різниці $\Delta i = i_{\max} - i_{\min}$, що визначає максимальну похибку Δi визначення нахилу, зумовлену сонячною радіацією. З рис. 8 видно, що для даного ГС вона становить $\sim 5 \cdot 10^{-6}$ градуси.

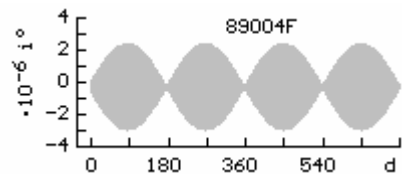


Рис. 8. Зміна протягом 2 років нахилу i ГС 89004F.

Величина Δi залежить від параметра S/m . Лінію регресії (рис. 9) знайдено за даними 12 ГС: $\Delta i = (641.71 \cdot S/m + 0.46) \cdot 10^{-6}$ град., коефіцієнт регресії $\rho = 0.8998$.

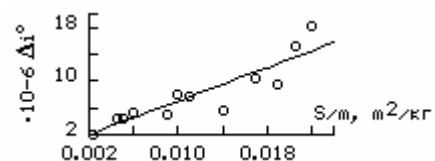


Рис. 9. Залежність максимальної похибки Δi при визначенні нахилу орбіти ГС, зумовленої сонячною радіацією, від відношення S/m .

Максимальне значення Δi ($20 \cdot 10^{-6}$ град.) може бути досягнуто в середині літа або зими у ГС з великим параметром S/m .

Довгота висхідного вузла

Зміна Ω протягом ~ 8.2 років приведена на рис. 10. Амплітуда добових коливань $\dot{\Omega}$ зменшується зі збільшенням нахилу орбіти ГС.

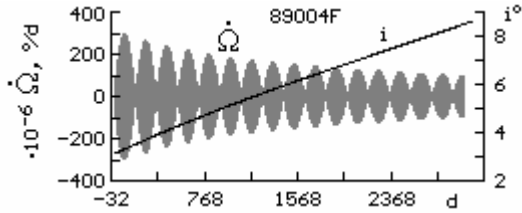


Рис. 10. Зміна $\dot{\Omega}$ і нахилу орбіти i ГС 89004F в інтервалі 5 років.

Залежність $\dot{\Omega}$ від часу можна виразити добутком:

$$\dot{\Omega}(t) = \frac{1}{\sin(i(t))} \cdot F(t), \quad (6)$$

де

$$F(t) = A^* \cdot \left| \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d\right) \right| \cdot \sin(2\pi t + \varphi_k), \quad (7)$$

φ_k – фаза добової гармоніки зміни значення функції $F(t)$, а T_d, φ_d – параметри річної гармоніки, що визначає зміну амплітуди добових коливань цих значень, A^* – деяка стала для даного супутника. Амплітуда довгоперіодичної гармоніки зміни $\dot{\Omega}$ залежить від часу:

$$A_d(t) = A_d(i(t)) = \frac{1}{\sin(i(t))} \cdot A^*.$$

На певному часовому інтервалі для даного ГС параметри $T_d, \varphi_d, \varphi_k$, а також середнє значення $A_d(t)$ можна визначити за принципом найменших квадратів.

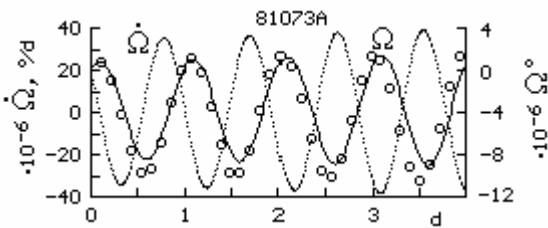


Рис. 11. Зміна $\dot{\Omega}$ і обчисленого двома способами Ω ГС 81073A в інтервалі 4 діб

Зміна нахилу орбіти i має дві гармоніки [4]. Півперіод основної – $T_i = 53.4 \pm 0.5$ років. Протягом 1 – 2 років нахил можна вважати сталим, визначити його, як середнє на даному інтервалі значення i_0 . Отже, інтегруючи (6) на не дуже великих проміжках часу отримаємо:

$$\Omega(t) = \frac{1}{\sin(i_0)} \cdot A^* \cdot (Q_1 - Q_2) \times$$

$$\times \text{sgn}\left(\frac{2\pi t}{T_d} + \varphi_d\right) - \Omega(t_0), \quad (8)$$

де

$$Q_1 = \frac{\sin\left[\left(\frac{1}{T_d} - 1\right) \cdot 2\pi t + (\varphi_d - \varphi_k)\right]}{\left(\frac{1}{T_d} - 1\right) \cdot 4\pi},$$

$$Q_2 = \frac{\sin\left[\left(\frac{1}{T_d} + 1\right) \cdot 2\pi t + (\varphi_d + \varphi_k)\right]}{\left(\frac{1}{T_d} + 1\right) \cdot 4\pi}. \quad (9)$$

На рис. 11 (суцільна крива) показано зміну Ω протягом 4 діб, знайдену за формулою (8) та параметрами $T_d, \varphi_d, \varphi_k$ і середнім A_d , обчисленими за принципом найменших квадратів, застосованого до короткоперіодичних змін $\dot{\Omega}$ і довгоперіодичних змін їх амплітуди. На даному проміжку ця крива мало відрізняється від таких самих змін Ω , знайдених методом чисельного інтегрування рівнянь Лагранжа (точки біля кривої на рис. 11).

Функції (9) тотожні формулам (5), але мають інші параметри. Це зумовлено подібністю функцій (7) і (3).

$$\text{Амплітуда } A_d(t) = \frac{1}{\sin(i(t))} \cdot A^* \in$$

функцією нахилу орбіти. Знайшовши $A_d(t_0)$ для певного значення i_0 , обчислимо його для будь-якого іншого i за формулою:

$$A_d(i) = \frac{\sin(i_0)}{\sin(i)} \cdot A_d(i_0). \quad (10)$$

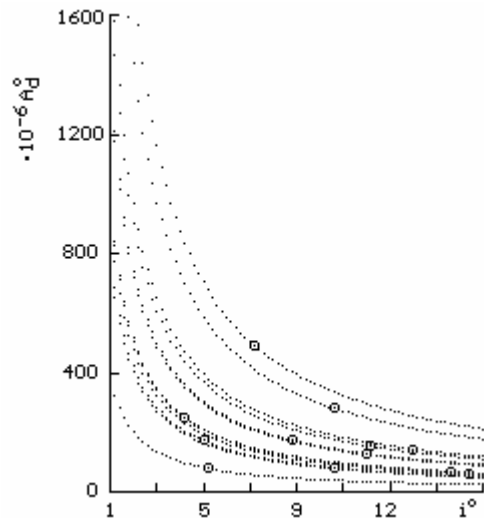


Рис. 12. Залежності амплітуди довгоперіодичних гармонік зміни добових коливань Ω від i для 12 ГС.

Точки (кружечки) на рис. 12 – це середні значення $A_d(t_0)$, обчислені для 12

супутників в інтервалі березень 1994 – березень 1996. Залежності A_d від i для них показані пунктирними лініями. Параметри S/m цих супутників знаходилися в межах від 0.0024 (супутник 83089В, нижня крива на рис.) до 0.0220 (супутник 83006А, верхня крива). Ця остання крива визначає максимальні похибки визначення Ω для різних нахилів i , зумовлені сонячною радіацією. Для $i = 1^\circ$ вона складає $\Delta\Omega \approx 0.02^\circ$.

Аргумент перигею

Зміну $\dot{\omega}$ для більшості ГС можна виразити як суму двох гармонік:

$$\dot{\omega}(t) = A_k \cdot \sin(4\pi \cdot t + \varphi_k) + A_d \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d\right), \quad (11)$$

де $A_k, A_d, \varphi_k, \varphi_d$ – параметри гармонік зміни $\dot{\omega}$. Період $T_d \approx 1$ рік, а $T_k \approx 0.5$ доби.

Середнє квадратичне відхилення σ_d точок від річної гармоніки включає в себе короткоперіодичні коливання з амплітудою A_k , тому σ_d близькі до A_k . Амплітуди A_k і A_d кореляційно залежні між собою: $A_d = 2.47 \cdot A_k + 0.02$, $\rho = 0.95$. Амплітуда A_d в ~ 2.5 рази більша за A_k .

Відносна похибка σ_d / A_d дрейфуючих ГС $\sigma_{\text{відн}} = 0.244 \pm 0.004$. Вона майже однакова для різних супутників типу D.

Довгоперіодичні зміни *лібраційних* супутників можуть досить сильно відхилитися від своїх гармонік, відносна похибка $\sigma_{\text{відн}} = 0.297 \pm 0.042$. Тому для них інтегрування рівнянь Лагранжа за допомогою гармонік не завжди дає точні результати.

Інтеграл від виразу (11) також є сумою двох гармонік, з періодами, як в (10), але з фазами, меншими на $\pi/2$, та іншими амплітудами:

$$\omega(t) = \frac{A_k}{4\pi} \cdot \sin\left(4\pi \cdot t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A_d T_d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d - \frac{\pi}{2}\right) - \omega_0. \quad (12)$$

З формул (11) і (12) видно, що амплітуда довгоперіодичної гармоніки зміни ω знач-

но більша, ніж амплітуда зміни $\dot{\omega}$, в 365/6.28 рази, в той час, як амплітуда короткоперіодичної – менша. Тому зміна ω має вигляд кривої, а не смуги, як зміни $\dot{\omega}$ (рис. 13). Короткоперіодичні коливання ω на графіку (рис. 13) непомітні, але їх добре видно на рис. 14 (суцільна крива), на часовому інтервалі 2 доби. Точки (кружечки) на рис. 13 і 14 – значення ω , обчислені методом чисельного інтегрування рівнянь Лагранжа. Із-за малої амплітуди короткоперіодичних коливань ω цей метод дає також непогані результати при визначенні ω на великих інтервалах часу.

Для вибірки з 12 ГС максимальні значення A_k і A_d відповідно рівні $0.22^\circ/\text{д}$ і $0.53^\circ/\text{д}$. Так як амплітуди зміни $\dot{\omega}$ рівні $\frac{A_k}{4\pi}$ і $\frac{A_d T_d}{2\pi}$, то їх максимуми – 0.018° і 31° , максимальні коротко- і довгоперіодична похибки відповідно рівні 0.036° і 62° .

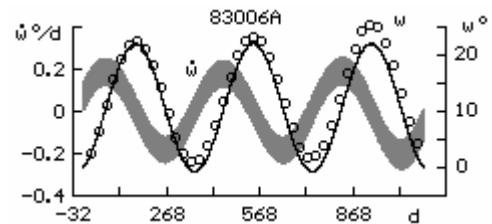


Рис. 13. Зміна $\dot{\omega}$ і аргумента перигея ω ГС 83006А в інтервалі 3 років.

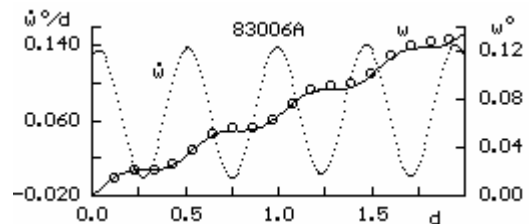


Рис. 14. Зміна $\dot{\omega}$ і аргумента перигея ω ГС 83006А в інтервалі 2 діб.

Ексцентриситет

Графік зміни e на інтервалі 3 років (рис. 15) має такий самий вигляд, як і зміни $\dot{\omega}$, виражається сумою двох гармонік за формулою (11), але з іншими параметрами.

Довгоперіодична гармоніка має період ~ 1 рік, амплітуда знаходиться в межах: $A_d = (0.4 - 4.4) \cdot 10^{-6}$ град. за добу. Річні коливання виконуються навколо нуля. Середня квадратична похибка σ_d в значній мірі визначається амплітудою

короткоперіодичних коливань: $\sigma_d = 0.6964 \cdot A_k + 0.0171$, коефіцієнт регресії $\rho = 0.994$. Період короткоперіодичних коливань \dot{e} $T_k \approx 0.5$ доби, амплітуда A_k не перевищує $1.5 \cdot 10^{-6}$ °/d (рис. 15).

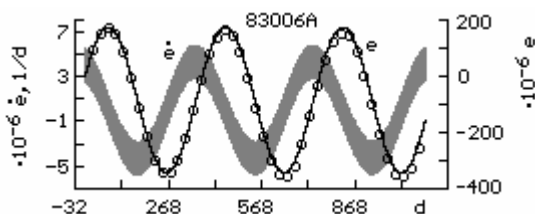


Рис. 15. Зміна \dot{e} і ексцентриситету e ГС 83006А в інтервалі 3 років.

Довгоперіодичні зміни \dot{e} однаково точно описуються двома гармоніками для ГС типу D і типу L. Зміна з часом e визначається виразом (12) з відповідними для нього параметрами $A_k, \varphi_k, A_d, \varphi_d, T_d$, знайденими за принципом найменших квадратів на основі зміни \dot{e} . Максимальна амплітуда річних коливань 0.000256 , похибка 0.000512 . Короткоперіодичні зміни e в ~ 2000 раз слабші від річних, їх амплітуда не перевищує $0.12 \cdot 10^{-6}$. На графіку (рис. 16) вони ледь помітні. Визначення зміни e шляхом чисельного інтегрування дає добрі результати на малих і на великих проміжках часу. На рис. 15 і 16 вони показані точками вздовж кривих зміни e .

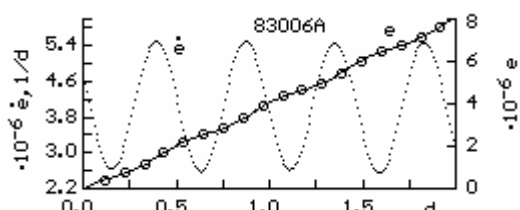


Рис. 16. Зміна \dot{e} і ексцентриситету e ГС 83006А в інтервалі 2 діб.

Середня аномалія

Зміну \dot{M} можна виразити як суму трьох гармонік, але третя гармоніка, з періодом до 80 діб, дуже слаба, тому її не враховуємо. Отже,

$$\dot{M}(t) = A_k \cdot \sin(4\pi \cdot t + \varphi_k) + A_d \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d\right) + \dot{M}_{d0}. \quad (13)$$

Період $T_d \approx 1$ рокові. Амплітуда A_d в 2 – 4 рази більша від A_k , $A_d = (0.004 - 0.52)^\circ/d$. Основною відмінністю зміни \dot{M} від зміни \dot{e} і $\dot{\omega}$ є те, що річна гармоніка зміни \dot{M} має вісь, ордината якої \dot{M}_{d0} відмінна від нуля. Поява параметра \dot{M}_{d0} зумовлена тим, що у формулі Лагранжа для M є член n (середньодобовий рух), який не містить похідної від збурюючого потенціала. Параметр \dot{M}_{d0} з високим коефіцієнтом регресії за даними 12 ГС корелює з дрейфом супутника (рис. 17) і близький до дрейфу [2]: $\dot{M}_{d0} = 1.0498 \cdot \dot{\lambda} + 1.4185$.

Формула (13) точно описує зміну \dot{M} всіх дрейфуючих ГС. У лібраційних супутників довгоперіодичні зміни \dot{M} можуть сильно відрізнитися від річних гармонік [2], і формула (13) виконується приблизно.

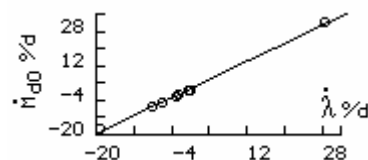


Рис. 17. Залежність параметра \dot{M}_{d0} від дрейфу $\dot{\lambda}$ геосинхронного супутника.

Інтегруючи вираз (13), отримаємо рівняння руху ГС, збуреного сонячною радіацією,

$$M(t) = \Delta M(t) + \dot{M}_{d0} \cdot t,$$

що є сумою лінійної складової і поправки

$$\Delta M(t) = \frac{A_k}{4\pi} \cdot \sin\left(4\pi \cdot t + \varphi_k - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{A_d T_d}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_d} + \varphi_d - \frac{\pi}{2}\right) - M_0, \quad (14)$$

яка зумовлена дією сонячної радіації на супутник. Вона є сумою двох гармонік і має такий самий вигляд, як функції зміни аргумента перигея і ексцентриситету (12).

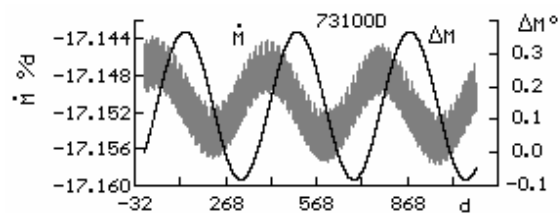


Рис. 18. Зміна \dot{M} і середньої аномалії M ГС 73100D в інтервалі 3 років.

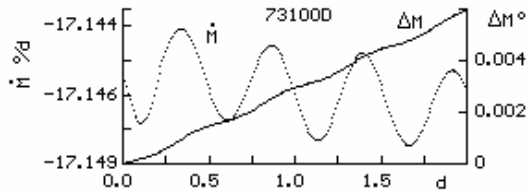


Рис. 19. Зміна \dot{M} і середньої аномалії M ГС 73100D в інтервалі 2 діб.

На рис. 18 приведено зміну \dot{M} супутника 73100D протягом 3 років – синусоїдальна смуга з негладкими межами, що зумовлені третьою гармонікою, період якої ~ 10 діб. Суцільними кривими на рис. 18 і рис. 19 показані криві поправок ΔM за сонячну радіацію, обчислені за формулою (14). З цієї ж формули знаходимо, що максимальна амплітуда півдобової гармоніки зміни $\Delta M(t)$ рівна 0.018° , а річної – 30.3° . Відповідно максимальні похибки за даними 12 супутників складають 0.036° і 60.6° .

Висновки

Отже, дія сонячної радіації на супутник приводить до короткоперіодичних змін в елементах орбіт геосинхронного супутника: з періодом 1 доба у великій піввісі a , нахилі орбіти i і довготі висхідного вузла Ω і періодом 0.5 доби у ексцентриситеті e , аргументі перигея ω і середній аномалії M , а також до довгоперіодичних змін з періодом 1 рік в e , ω і M . Вікових змін не виявлено.

Зміна елементів орбіт під дією сонячної радіацією можлива при зміні елементів під дією тяжіння Сонця і Місяця. Наприклад, змінюється амплітуди добових коливань Ω при зміні нахилу i . Але нахил змінюється з періодом 53 роки, то відповідно Ω буде змінюватися з таким самим періодом.

Література

1. Арнольд К. Методы спутниковой геодезии. – Москва: «Недра», 1973. – 224с.
2. Клімик В.У., Єпішев В.П., Мотрунич І.І., Кудак В.І., Мацо Г.М. Збурення в русі геосинхронних супутників під дією сонячного випромінювання // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2008. – Вип. 23. – С. 164–171.
3. Єпішев В.П., Клімик В.У., Кудак В.І. Возмущение геосинхронных спутников под действием давления солнечного излучения // Труды международной конференции «Астрономия и всемирное наследие: через время и континенты». – Казань: Казан. гос.ун-т, 2009. – С.66-67.
4. Клімик В.У., Кудак В.І., Мацо А.М. Еволюція орбіт некерованих геостаціонарних супутників // Науковий вісник Ужгородського університету. Серія Фізика. – 2002. – Вип. 12. – С. 35–42.

INTEGRATING OF EQUATIONS OF THE LAGRANGE FOR DEFINITION OF DISTURBANCES FROM A SOLAR RADIATION IN ORBITS OF GEOSYNCHRONOUS SATELLITES

V.U. Klimyk, V.P. Yepishev, I.I. Motrunich, V.I. Kudak, G.M. Matso

Uzhhorod National University, Laboratory of space researches
Daleka Str., 2a, 88000, Uzhhorod, Ukraine

Derivative from members of orbits of geosynchronous satellites are introduced through harmonics obtained by a principle of least squares on the basis of sampling 12 satellites from the catalog. The obtained expressions are integrated elementary. The results coincide functions of variation of orbits obtained by a numerical integration there, where it can be applied.

Key words: geosynchronous satellites, disturbance of orbits, solar radiation, harmonics, equation of the Lagrange.

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ОТ СОЛНЕЧНОЙ РАДИАЦИИ В ОРБИТАХ ГЕОСИНХРОННЫХ СПУТНИКОВ

**В.У. Климик, В.П. Епишев, И.И. Мотрунич, В.И. Кудак,
Г.М. Мацо**

Ужгородский национальный университет, Лаборатория космических исследований
ул. Далёкая, 2а, 88000, Ужгород

Производные от элементов орбит геосинхронных спутников представляются через гармоники, полученные по принципу наименьших квадратов на основе выборки 12 спутников из каталога. Полученные выражения интегрируются элементарно. Результаты совпадают с функциями изменения орбит, полученными численным интегрированием уравнений Лагранжа там, где его можно применить.

Ключевые слова: геосинхронные спутники, возмущения орбит, солнечная радиация, гармоники, уравнения Лагранжа.